

Devoir Maison 3

Pour le 3 novembre 2025

Exercice 1*(D'après Ecricome 2020)*

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite de restes de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $R_{2,n}$ la suite de reste de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

(a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(d) En déduire que

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- (b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

- (c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 et que, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

- (d) Montrer que, pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

- (e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

- (b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

- (c) Soit $N \in \mathbb{N}$, en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

- (d) En déduire que, pour tout $n \geq 0$

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

- (e) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 0$

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$